APLICACIONES DE SISTEMAS DE ECUACIONES EL EN INGENIERIA

Un empresario tiene tres máquinas que son empleadas en la fabricación de cuatro productos diferentes. Para utilizar plenamente las máquinas estas estarán en operación 8 horas diarias. El número de horas que cada máquina es usada en la producción de cada uno de los cuatro productos está dado por

	Producto 1	**Producto 2**	**Producto 3**	**Producto 4**
Máquina 1	1	2	1	2
Máquina 2	2	0	1	1
Máquina 3	1	2	3	0

Por ejemplo, en la producción de una unidad del producto 1 la máquina 1 se usa 1 hora, la máquina 2 se usa 2 horas y la máquina 3 se usa 1 hora. Encuentre el número de unidades que se deben producir de cada uno de los 4 productos un día de 8 horas completas.

Solución: Sea x_i el número de unidades que se deben producir del producto i que se fabrican durante las 8 horas con $i = 1, 2, 3$ y 4.

$1x_1$: Es la cantidad de horas diarias que es usada la máquina 1 en la fabricación del producto 1.
$2x_2$: Es la cantidad de horas diarias que es usada la máquina 1 en la fabricación del producto 2.
$1x_3$: Es la cantidad de horas diarias que es usada la máquina 1 en la fabricación del producto 3.
$2x_4$: Es la cantidad de horas diarias que es usada la máquina 1 en la fabricación del producto 4.

Como la máquina 1 debe ser usada 8 horas diarias, entonces tenemos que

$$1x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 2x_4 = 8$$

procediendo de forma similar para las máquinas 2 y 3 obtenemos el sistemas de ecuaciones lineales siguiente

$$1x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 2x_4 = 8$$
$$2x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 1x_4 = 8$$
$$1x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 0x_4 = 8$$

Aplicando eliminación de Gauss-Jordan llegamos al sistema equivalente

$$x_1 + x_4 = 4$$
$$x_2 + x_4 = 2$$
$$x_3 - x_4 = 0$$

De donde,

$$x_1 = 4 - x_4$$
$$x_2 = 2 - x_4$$
$$x_3 = x_4$$

Cada x_i es no negativa por representar la cantidad de unidades fabricadas del producto i cada día, por lo tanto $x_i < 0$ no tiene sentido.

Si asumimos que se produce un número completo de unidades, entonces x_i debe ser además un número entero para que todos los x_i, sean no negativos x_4 debe ser un entero menor o igual que 2, y por lo tanto las posibles soluciones son

	x_1	x_2	x_3	x_4
Solución 1	4	2	0	0
Solución 2	3	1	1	1
Solución 3	2	0	2	2

Por ejemplo la solución 1 significa que en un día para las máquinas estar completamente utilizadas se deben producir 4 unidades del producto 1, 2 del producto 2 y ninguna de los productos 3 y 4.

Para resolver un problema que involucra sistemas de ecuaciones lineales se debe tener en cuenta lo siguiente:

1. Entender el problema.
2. Determinar los datos conocidos.

3. Nombrar adecuadamente las incógnitas de acuerdo a lo que se pida.
4. Establecer las relaciones existentes entre los datos conocidos y las incógnitas.
5. Determinar el sistema de ecuaciones lineales asociado a las relaciones en 4.
6. Resolver el sistema de ecuaciones lineales resultante en 5.
7. Verificar que las respuestas obtenidas si estén de acuerdo al problema.
8. Interpretar el resultado si es posible.

Modelos de Leontief de Entrada - Salida.

Suponga que un sistema económico tiene n industrias distintas $\{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$, cada una de las cuales tiene necesidades de entrada (materia prima, instalaciones) y una salida (productos terminados). El coeficiente de entrada d_{ij} mide la cantidad de entrada que la industria j-ésima requiere de la industria i-ésima para producir una unidad: La colección de coeficientes de entrada esta dada por la siguiente matriz n x n. Las unidades se miden en "cantidades de dólar".

$$D = \underbrace{\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & d_{2n} \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & d_{nn} \end{bmatrix}}_{\substack{I_1 \quad I_2 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad I_n \\ \text{Usuario}}} \left.\begin{matrix} I_1 \\ I_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ I_n \end{matrix}\right\} \text{Proveedor}$$

Esta matriz se denomina matriz de entrada – salida. Para comprender como utilizar esta matriz, imagine que los elementos de (d_{ij}) están dados en dólares. Por ejemplo, si $d_{12} = 0.41$, entonces debe utilizarse 0.41 dólares del valor del producto de la industria 1 para producir un valor de un dólar del producto de la industria 2. La cantidad total gastada por la j-ésima industria para producir un valor de un dólar de salida esta dada por la suma de los elementos de la j-ésima columna. Por tanto, para que funcione este modelo, los valores de d_{ij} deben ser

tales que $0 \leq d_{ij} \leq 1$ y la suma de los elementos de cualquier columna debe ser menor o igual que 1.
El modelo de Leontief cerrado puede aplicarse a n industrias y sus propiedades básicas son:

1. La matriz D tiene componentes d_{ij}, donde $0 \leq d_{ij} \leq 1$
2. La suma de los componentes de cualquier columna es 1.
3. Se satisface la condición de equilibrio, es decir, que los gastos debidos al consumo son iguales a los ingresos debidos a las ventas.

Suponga que una economía simple tiene tres industrias que son dependientes entre si, pero que no dependen de industrias externas (se cumple el modelo cerrado de Leontief).

Las industrias son: agricultura, construcción y vestuario. La fracción de cada producto que consume cada industria esta dado por:

		Agricultura	Construcción	Vestuario
	Agricultura	$\frac{7}{16}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{16}$
Consumo	Construcción	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{16}$
	Vestuario	$\frac{4}{16}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{8}{16}$

Producción

La componente d_{ij} denota la fracción de bienes producidos por la gente que trabaja en la industria j y que es consumida por la gente que trabaja en la industria i.

Por ejemplo $d_{31} = \frac{4}{16}$ significa que la industria del vestuario consume $\frac{4}{16}$ del total de la producción agrícola.
Supongamos que los ingresos de la industria de la agricultura, construcción y vestuario son P_1, P_2 y P_3 respectivamente. Determine los ingresos de cada sector de la economía.

Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{7}{16}P_1 + \frac{3}{6}P_2 + \frac{3}{16}P_3 &= P_1 \\
\frac{5}{16}P_1 + \frac{1}{6}P_2 + \frac{5}{16}P_3 &= P_2 \\
\frac{4}{16}P_1 + \frac{2}{6}P_2 + \frac{8}{16}P_3 &= P_3
\end{aligned}$$

este sistema es equivalente al sistema

$$\begin{aligned}
-\frac{9}{16}P_1 + \frac{3}{6}P_2 + \frac{3}{16}P_3 &= 0 \\
\frac{5}{16}P_1 - \frac{5}{6}P_2 + \frac{5}{16}P_3 &= 0 \\
\frac{4}{16}P_1 + \frac{2}{6}P_2 - \frac{1}{2}P_3 &= 0
\end{aligned}$$

Usando eliminación de Gauss-Jordan podemos resolver este sistema

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -\frac{9}{16} & \frac{1}{2} & \frac{3}{16} & 0 \\ \frac{5}{16} & -\frac{5}{6} & \frac{5}{16} & 0 \\ \frac{4}{16} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{48F_2 \\ 48F_3}]{16F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} -9 & 8 & 3 & 0 \\ 15 & -40 & 15 & 0 \\ 12 & 16 & -24 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{4}F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} -9 & 8 & 3 & 0 \\ 15 & -40 & 15 & 0 \\ 3 & 4 & -6 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_{31}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -6 & 0 \\ 15 & -40 & 15 & 0 \\ -9 & 8 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[3F_1+F_3]{-5F_1+F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -6 & 0 \\ 0 & -60 & 45 & 0 \\ 0 & 20 & -15 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{5}F_3]{-\frac{1}{15}F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -6 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{(-1)F_2+F_3}$$

El sistema correspondiente a esta última matriz es

$$P_1 = P_3$$
$$P_2 = \frac{3}{4} P_3$$
$$P_3 = P_3$$

haciendo $P_3 = 4t$, t es un real no negativo. Asi cualquier solución (P_1, P_2, P_3) es de la forma $t(4,3,4)$ por tanto hay infinitas soluciones, sin embargo los ingresos de la industria de la agricultura, construcción y vestuario están en la proporción 4:3:4.

Un inversionista le afirma a su corredor de bolsa que todas sus acciones son de tres compañías Delta, Hilton y McDonald's y que hace dos días su valor bajó \$350 pero que ayer aumentó \$600. El corredor recuerda que hace dos días las acciones de Delta bajó \$1 por acción y las de Hilton \$1.50, pero que el precio de las acciones de McDonald's subió \$0.50. También recuerda que ayer el precio de las acciones de Delta subió \$1.50 por acción, las de Hilton bajó otros \$0.5 por acción y las de McDonald's subió \$1.0 por acción. Demuestre que el corredor no tiene suficiente información para calcular el número de acciones que posee el inversionista en cada compañía, pero que si el dice que tiene 200 acciones en McDonald's, el corredor puede calcular el número de acciones que tiene en Delta y en Hilton.

Solución:

Sea x_D el número de acciones en la compañía Delta.

x_H el número de acciones en la compañía Hilton.

x_M el número de acciones en la compañía McDonald's.

$$-1x_D - 1.5x_H + 0.5x_M = -350$$
$$1.5x_D - 0.5x_H + 1.0x_M = 600$$

Aplicando el método de Gauss-Jordan podemos resolver el sistema

$$\begin{bmatrix} -1 & -1.5 & 0.5 & \vdots & -350 \\ 1.5 & -0.5 & 1 & \vdots & 600 \end{bmatrix} \xrightarrow[2R_2]{2R_1} \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 & \vdots & -700 \\ 3 & -1 & 2 & \vdots & 1200 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2+R_1} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & \vdots & 500 \\ 3 & -1 & 2 & \vdots & 1200 \end{bmatrix} \xrightarrow{-3R_1+R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & \vdots & 500 \\ 0 & 11 & -7 & \vdots & -300 \end{bmatrix}$$

El corredor de bolsa no tiene información suficiente para determinar el número de acciones que tiene en cada compañía el inversionista, puesto que el sistema tiene mas incógnitas que ecuaciones.

El sistema correspondiente a la última matriz es

$$\begin{aligned} x_D - 4x_H + 3x_M &= 500 \\ 11x_H - 7x_M &= -300 \end{aligned}$$

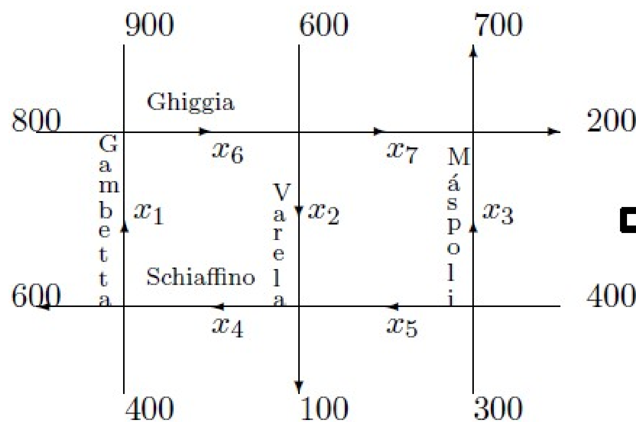
Si se sabe que el inversionista tiene 200 acciones en McDonald's, es decir, $x_M = 200$ entonces la solución del sistema es

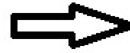
$$11x_H = -300 + 7(200)$$

$$x_H = 100$$
$$x_D = 500 + 4(100) - 3(200)$$
$$x_D = 300$$

Circulación sobre una red vial: Como el flujo de transito varía considerablemente durante el día, supondremos Que los números mostrados representan el flujo de transito promedio a la hora de mayor circulación.

Algunas obras de reparación dificultaran la circulación en la calle Schiaffino entre Varela y Gambetta. ¿Es posible cortar completamente el tráfico allí y atender la demanda que plantea la circulación de vehículos en la hora pico? Si no es posible, ¿qué medida es conveniente adoptar para minimizar el tráfico por esa calle?





EL SISTEMA FINAL

$$
\begin{aligned}
-x_1 + x_4 &= 200, \\
x_2 - x_4 + x_5 &= 100, \\
x_3 + x_5 &= 700, \\
x_1 - x_6 &= 100, \\
x_2 - x_6 + x_7 &= 600, \\
x_3 + x_7 &= 900,
\end{aligned}
$$

EN FORMA MATRICIAL

$$
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & \\
\hline
-1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 200 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 100 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 700 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 100 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 600 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 900
\end{array}\right)
$$

Entonces, nuestro objetivo es hallar una solucin del sistema en la que ninguna de las incgnitas sea negativa y para la que x_4 tenga el mnimo valor posible. Si consiguiramos $x_4 = 0$ sera ptimo. Pero no nos adelantemos a los acontecimientos, veamos qu es lo que nuestro modelo predice.

Para estudiar el sistema procedemos a escalerizar la matriz. Indicaremos sobre el margen de derecho de la matriz cules fueron las operaciones hechas en cada paso, sin ms comentarios.

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} \mathbf{-1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 700 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 300 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 600 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 900 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \\ \longleftarrow F_4 + F_1. \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 700 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 500 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 900 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \longleftarrow F_5 - F_2. \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 700 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 500 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 200 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \longleftarrow F_6 - F_3. \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 700 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & -1 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 200 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 200 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \longleftarrow F_5 - F_4. \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 700 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textbf{-1} & 0 & 1 & 200 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longleftarrow F_6 - F_5.$$

Ahora que hemos escalerizado el sistema podemos ver que es compatible e indeterminado.

Se trata de un sistema de 6 ecuaciones y 7 incógnitas, ¿Podría haber sido compatible determinado? ¿E incompatible?.

Si pasamos de la representación matricial a escribir el sistema de ecuaciones que resulta de la escalerización, obtenemos

$$\begin{aligned} -x_1 + x_4 &= 200, \\ x_2 - x_4 + x_5 &= 100, \\ x_3 + x_5 &= 700, \\ x_4 - x_6 &= 300, \\ -x_5 + x_7 &= 200. \end{aligned}$$

Las soluciones pueden expresarse en términos de las variables libres x_6 y x_7, en la forma

$$\begin{aligned} x_1 &= x_6 + 100, \\ x_2 &= x_6 - x_7 + 600, \\ x_3 &= -x_7 + 900, \\ x_4 &= x_6 + 300, \\ x_5 &= x_7 - 200. \end{aligned}$$

Para minimizar x_4 basta escoger el menor valor posible de x_6. Ya que x_6 no puede ser negativo, tenemos

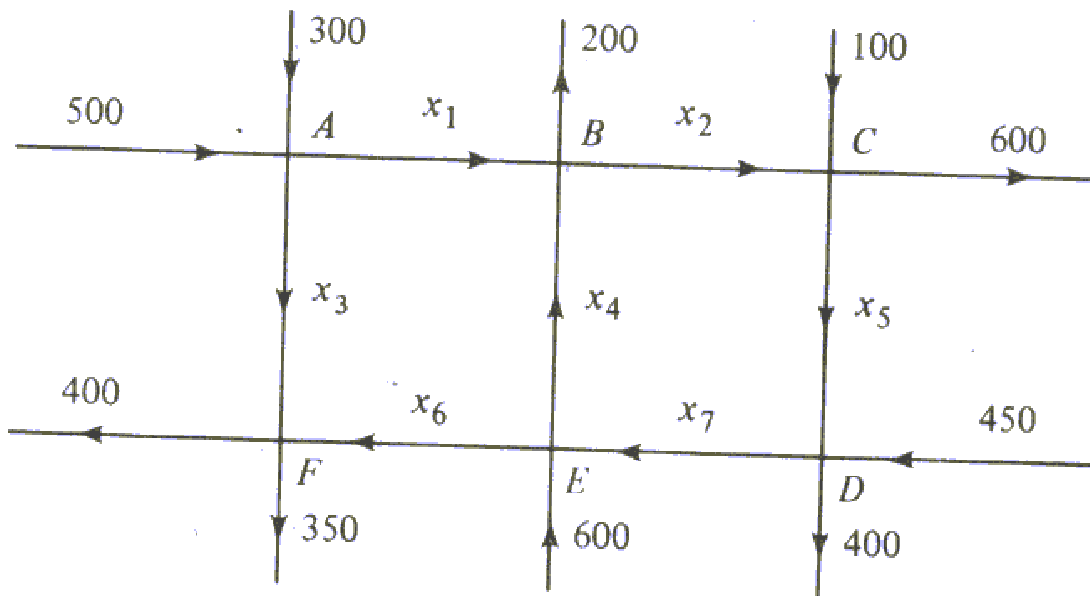
$$x_4 \geq 300,$$

y el valor mínimo de $x_4 = 300$ se alcanza cuando x_6 es nulo. Así que, para atender la demanda de vehículos entrantes y salientes minimizando el tráfico en la calle Schiaffino entre Varela y Gambetta, debemos cerrar el tráfico en Ghiggia entre Gambetta y Varela. De esta manera forzamos la igualdad $x_6 = 0$. Por último, con $x_6 = 0$ se tiene

$$x_1 = 100,$$
$$x_2 = -x_7 + 600,$$
$$x_3 = -x_7 + 900,$$
$$x_4 = 300,$$
$$x_5 = x_7 - 200.$$

Análisis de flujo de tráfico.

Supongamos que tenemos una red de calles en una sola dirección en una ciudad. Se quiere analizar el flujo de tráfico en cada una de las calles. La dirección del tráfico en cada una de las calles está dado en la siguiente figura.



En varios sitios se han colocado contadores, y el número promedio de carros que pasan por cada uno de ellos en el periodo de 1 hora, aparece también en la figura. Las variables $x_1, \dots x_6, x_7$ representan el número de carros por hora que pasan de la intersección A a la intersección B, de la intersección B a la intersección C, etc.

Primero determinamos los valores posibles de cada x_i. Asumiendo que no hay paradas en el tráfico, el número de carros que llega a una intersección debe ser igual al número de carros que sale de la intersección. Con base a este supuesto obtenemos el siguiente sistema.

$x_1 + x_3 = 800$ (flujo de tráfico en la intersección A).
$x_1 - x_2 + x_4 = 200$ (flujo de tráfico en la intersección B).
$x_2 - x_5 = 500$ (flujo de tráfico en la intersección C).
$x_3 + x_6 = 750$ (flujo de tráfico en la intersección F).
$x_4 + x_6 - x_7 = 600$ (flujo de tráfico en la intersección E).
$-x_5 + x_7 = 50$ (flujo de tráfico en la intersección D).

Aplicando el método de Gauss-Jordan llegamos al sistema equivalente

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_6 + 50 \\
x_2 &= x_7 + 450 \\
x_3 &= -x_6 + 750 \\
x_4 &= -x_6 + x_7 + 600 \\
x_5 &= x_7 - 50 \\
x_6 &= x_6 \\
x_7 &= x_7
\end{aligned}
$$

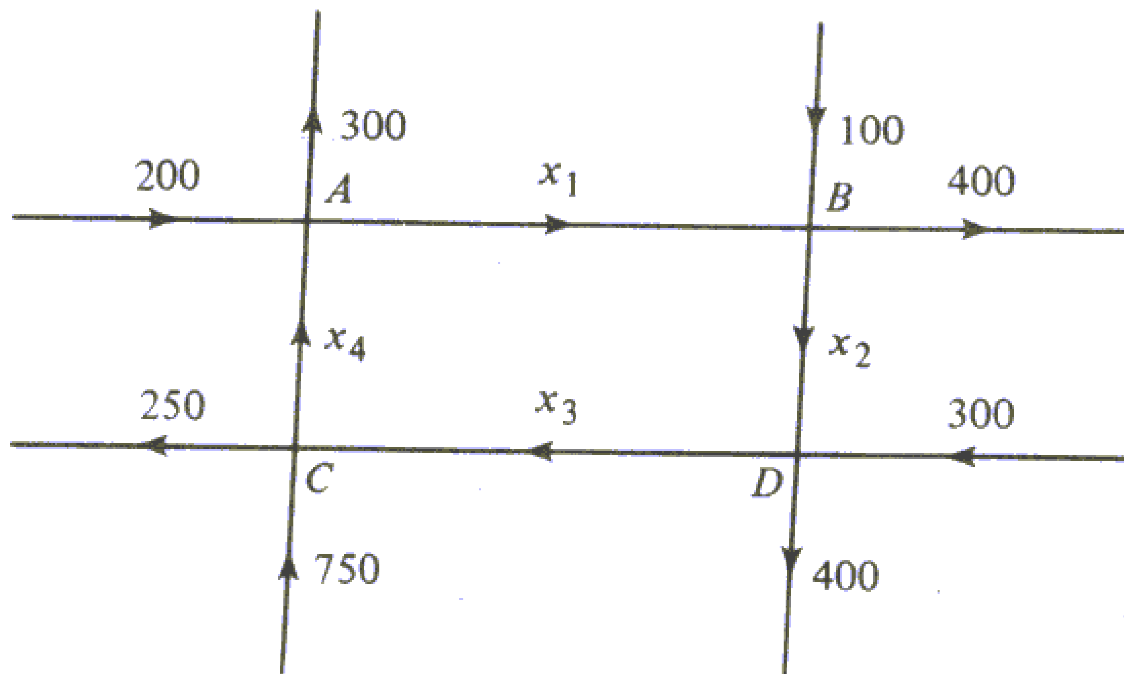
como las x_i son número de carros por hora de una intersección a otra, no son permitidos valores negativos para las x_i, ya que como las calles son en una dirección, un valor negativo de x_i se interpreta como el número de carros que van en contravía. Con esta restricción tenemos $x_3 = 750 - x_6 \geq 0$, es decir, $x_6 \leq 750$. Igualmente, $x_5 = x_7 - 50 \geq 0$, es decir, $x_5 \geq 50$.

Supongamos ahora que la calle que va de D a E va a estar en reparación, por lo que se requiere que el tráfico en este espacio sea mínimo. Esto nos lleva a $x_7 = 50$. Por consiguiente a $x_2 = 500$ y $x_5 = 0$. Recíprocamente si $x_5 = 0$, tenemos $x_7 = 50$, entonces, si cerramos la carretera entre C y D tendremos el mínimo tráfico posible entre D y E. Los flujos x_1, x_3, x_4 y x_6 no están determinados en forma única. Si toda la distancia de D a F estuviera en reparación, requeriríamos que x_6 fuera mínimo, o sea cero. En este caso $x_1 = 50$, $x_3 = 750$ y $x_4 = 650$.

Para el control de cierta enfermedad de una planta, se usan tres productos químicos en las siguientes proporciones: 10 unidades

del químico A, 12 unidades del químico B, y 8 unidades del químico C. Las marcas X, Y y Z son atomizadores comerciales que se venden en el mercado. Un galón de la marca X contiene los químicos A, B y C, en la cantidad de 1, 2 y 1 unidades respectivamente. Un galón de la marca Y contiene los químicos en la cantidad de 2, 1 y 3 unidades respectivamente; y un galón de la marca Z los contiene en la cantidad 3, 2 y 1 unidades respectivamente. ¿Qué cantidad de cada marca debe emplearse para fumigar la planta con las cantidades exactas de los químicos requeridas para el control de la enfermedad?

3. El siguiente diagrama reproduce una red de calles de una sola vía con el flujo de tráfico en las direcciones indicadas. El número de carros está dado como promedio de carros por hora. Asumiendo que el flujo que llega a una intersección es igual al flujo que sale de ella, construya un modelo matemático del flujo de tráfico. Si la calle que va de C a A estuviera en reparación, ¿cuál sería el mínimo tráfico que se podría permitir?. ¿Cómo podría obtenerse este mínimo?



4. Una firma de transporte posee tres tipos distintos de camiones, A, B y C. Los camiones están equipados para el

transporte de 2 clases de maquinaria pesada. El número de máquinas de cada clase que puede transportar cada camión es

TIPOS DE CAMIONES

Máquinas	Tipo A	Tipo B	Tipo C
Clase 1	2	1	1
Clase 2	0	1	2

La firma consigue una orden para 32 máquinas de la clase 1 y 10 máquinas de la clase 2. Encuentre el número de camiones de cada tipo que se requieren para cumplir la orden, asumiendo que, cada camión debe estar completamente cargado y el número exacto de máquinas pedidas es el que se debe despachar. Si la operación de cada tipo de camión tiene el mismo costo para la firma, ¿cuál es la solución más económica?.

5. Suponga que una economía simple tiene cuatro industrias: agricultura, construcción, vestuario y transporte, y que se satisfacen las condiciones del modelo cerrado de Leontief. Los insumos y los productos están dados por la siguiente matriz.

	Agricultura	**Construcción**	**Vestuario**	**Transporte**
Agricultura	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
Construcción	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
Vestuario	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Transporte	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$ $\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Suponga que los ingresos a las industrias de agricultura, construcción, vestuario y transporte son P_1, P_2, P_3 y P_4 respectivamente. Asuma que se cumple la condición de equilibrio, y determine los ingresos de cada sector de la economía.

6. Una refinería produce gasolina con y sin azufre. Cada tonelada de gasolina sin azufre requiere 5 minutos en la planta de mezclado y 4 en la planta de refinación. Por su parte, cada tonelada de gasolina con azufre requiere 4 minutos en la planta de mezclado y 2 en la planta de refinación. Si la planta de mezclado tiene 3 horas disponibles y la de refinación 2, ¿cuántas toneladas de cada gasolina se deben producir para que las plantas se utilicen al máximo?.

7. Un industrial produce dos tipos de plástico: regular y especial. Cada tonelada de plástico regular necesita 2 horas en la planta A y 5 en la planta B; cada tonelada de plástico especial necesita 2 horas en la planta A y 3 en la planta B. Si la planta A tiene disponibles 8 horas al día y la planta B 15 horas al día, ¿cuántas toneladas de cada tipo de plástico pueden fabricarse diariamente de modo que las plantas operen a toda su capacidad?

8. Un dietista esta preparando una dieta que consta de los alimentos A, B y C. Cada onza del alimento A contiene 2 unidades de proteína, 3 unidades de grasa y 4 unidades de carbohidratos. Cada onza del alimento B contiene 3 unidades de proteína, 2 unidades de grasa y 1 unidad de carbohidratos. Cada onza del alimento C contiene 3 unidades de proteína, 3 unidades de grasa y 2 unidad de carbohidratos. Si la dieta debe proporcionar exactamente 25 unidades de

proteína, 24 unidades de grasa y 21 unidades de carbohidratos, ¿cuántas onzas de cada comida se necesitan?